RECTA TANGENTE
→ CALCULAR LA VELOCIDAD EN UN PUNTO EXACTO DE LA FUNCIÓN

Derivada de una función en un punto

martes, 6 de mayo de 2025 14:46

→ Dada la función $y = f(x)$ y un punto de abscisa $x = a \in Dom(f)$, la derivada de f en $x = a$ se DENOTA $f'(a)$ y se define como:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

f prima

$$f'(7) = \lim_{x \to 7} \frac{f(x) - f(7)}{x - 7}$$

Siempre que el límite exista

DE MANERA EQUIVALENTE, EXISTE 2 FORMAS:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$V = \frac{e}{t}$ → ACERCAMIENTO

OTRAS NOTACIONES PARA LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN $y = f(x)$ en $x = a \in Dom(f)$

$$f'(a), \quad y'|_{x=a}, \quad \frac{df}{dx}\Big|_{x=a}$$

en la CALCULADORA

↳ derivada de la función con respecto a la x.

LA DERIVADA REPRESENTA UNA RAZÓN DE CAMBIO. (RITMO, VELOCIDAD) DE CAMBIO.

↳ (-) = DISMINUCIÓN
↳ (+) = AUMENTA

Reglas de derivación

Sean: $b \in \mathbb{R}$, $U(x)$, $V(x)$

↳ Son funciones de variable x

1) $f(x) = bU(x)$
$f'(x) = [bU(x)]'$
$f'(x) = b \cdot U'(x)$

2) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Q}$
$f'(x) = (x^n)'$
$f'(x) = n x^{n-1}$

Ej:
- $f(x) = x^4$
  $f'(x) = (x^4)'$
  $f'(x) = 4x^3$
- $h(x) = \frac{3}{5} x^{15}$
  $h'(x) = [\frac{3}{5} x^{15}]'$
  $h'(x) = \frac{3}{5} (x^{15})'$
  $h'(x) = \frac{3}{5} \times 15 \, x^{14}$
  $h'(x) = 9x^n$
- $f(x) = 12x \cdot \sqrt{x}$
  $f(x) = 12x^1 \cdot x^{1/2}$
  $f(x) = 12x^{3/2}$
- $f(x) = [12x^{3/2}]'$
  $f'(x) = 12 \cdot \frac{3}{2} x^{1/2}$
  $f'(x) = 18x^{1/2}$
  $f'(x) = 18\sqrt{x}$

3) $f(x) = U(x) + V(x)$
$f'(x) = U'(x) + V'(x)$

4) $f(x) = U(x) - V(x)$
$f'(x) = U'(x) - V'(x)$

↳
- $f(x) = (2x+3)^2$
  $f(x) = 4x^2 + 12x + 9$
  $f'(x) = (4x^2)' + (12x)' + (9)'$
  $f'(x) = 4(2x) + 12$
  $f'(x) = 8x + 12$

5: $f(x) = U(x) \cdot V(x)$
$f'(x) = [U(x) \cdot V(x)]'$
$f'(x) = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$

- $f(x) = (5x^3 - 2x) \cdot (x^4 + 2x^3 - 16)$
  $f'(x) = [(5x^3 - 2x)(x^4 + 2x^3 - 16)]'$
  $f'(x) = (5x^3 - 2x)'(x^4 + 2x^3 - 16) + (5x^3 - 2x)(x^4 + 2x^3 - 16)'$
  $f'(x) = (15x^2 - 2)(x^4 + 2x^3 - 16) + (5x^3 - 2x)(4x^3 + 6x^2)$

6: $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)} \rightarrow f'(x) = \left[\frac{U(x)}{V(x)}\right]'$

$$f'(x) = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{[V(x)]^2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2+5}\right)' = \frac{(3x-2)'(x^2+5) - (3x-2)(x^2+5)'}{(x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3(x^2+5) - (3x-2)(2x)}{(x^2+5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 15 - 6x^2 + 4x}{(x^2+5)^2} = \frac{-3x^2 + 4x + 15}{(x^2+5)^2}$$

7) $f(x) = (U(x))^n$

$f'(x) = [(U(x))^n]'$

$f'(x) = n((U(x))^{n-1} \times U'(x)$

- $f(x) = (x^2+5)^{14}$
  $f'(x) = [(x^2+5)^{14}]'$
  $f'(x) = 14(x^2+5)^{13} \times (x^2+5)'$
  $f'(x) = 14(x^2+5)^{13} \times (2x)$
  $f'(x) = 28x(x^2+5)^{13}$

Halle $f'(x)$, si $f(x) = 6x\sqrt{x^2+9}$

$f(x) = (6x)(\sqrt{x^2+9})$
$f'(x) = (6x)'(\sqrt{x^2+9}) + (6x)[(x^2+9)^{1/2}]'$
$f'(x) = 6(\sqrt{x^2+9}) + (6x) \times \frac{1}{2}(x^2+9)^{-1/2} \cdot (x^2+9)'$
$f'(x) = 6\sqrt{x^2+9} + (6x) \times \frac{1}{2}(x^2+9)^{-1/2} \cdot (2x)$
$f'(x) = 6\sqrt{x^2+9} + 6x^2(x^2+9)^{-1/2}$

1- Sea la función $f(x) = 3x^2 - 2x$, use la definición y halle $f'(2)$.

Sol:

i) $f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2x - 8}{x - 2}$ → ASÍNTOTA SIMPLE $\frac{0}{0}$: F.I

$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+4)}{x-2} = 10$

$f'(2) = 10$

ii) $f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

$f(2+h) = 3(2+h)^2 - 2(2+h)$
$= 3(4 + 4h + h^2) - 4 - 2h$
$f(2+h) = 3h^2 + 10h + 8$, luego,

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 10h + 8 - 8}{h}$

$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+10)}{h} = 10$

$f'(2) = 10$

Esto es DERIVADA POR DEFINICIÓN

Sea la función $f(x) = \sqrt{2x^2+1}$
Usar la definición de derivada para hallar $f'(2)$.

Solución:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \qquad f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - 3}{x-2} \quad \frac{0}{0} \text{ (F.I)}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{2x^2+1} - 3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{2x^2+1} + 3}{\sqrt{2x^2+1} + 3}$$

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x^2+1}+3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$f'(2) = \frac{d}{dx}(\sqrt{2x^2+1})\Big|_{x=2}$$

EN LA CALCULADORA

DERIVADAS BÁSICAS

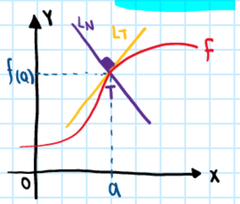
Función	Derivada de la $f(x)$
$f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (b)'$, $f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = (x)' = 1$
$f(x) = bx$, $b \in \mathbb{R}$	$f'(x) = (bx)'$, $f'(x) = b(x)'$, $f'(x) = b$

Ejemplo:
- $f(x) = 3 \rightarrow f'(x) = 3' = 0$
- $f(x) = 11x \rightarrow f'(x) = 11$
- $f(x) = \frac{2}{3}x \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}$
- $g(x) = \frac{2x}{3} \rightarrow g'(x) = \frac{(2x)'}{3} = \frac{2}{3}$ (2(x)' → 1)

• Interpretación Geométrica de la derivada.

→ La derivada de f en $x = a \in Dom(f)$, denotado por $f'(a)$ representa la pendiente de la recta tangente (L_T) trazada a la gráfica de f en el punto $T(a; f(a))$.

es decir: $f'(a) = m_{L_T}$



Ecuación de la recta tangente L_T

$$L_T: y - f(a) = m_{L_T}(x - a)$$

→ RECTA DE LA PENDIENTE TANGENTE

Ecuación de la recta normal (L_N)

$$L_N: y - f(a) = m_{L_N}(x - a)$$

Ejemplito:
Halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función.

$f(x) = (2x-1)\sqrt{x^2+9}$ en el punto de abcisa $x = 4$

Solución:

$f'(x) = (2x-1)'\sqrt{x^2+9} + (2x-1)[(x^2+9)^{1/2}]'$
$f'(x) = (2)\sqrt{x^2+9} + (2x-1) \cdot \frac{1}{2}(x^2+9)^{-1/2}(2x)$

Punto de tangencia: $T(4; f(4)) = T(4; 35)$

Con la calculadora:

$$f'(4) = \frac{d}{dx}((2x-1)\sqrt{x^2+9})\Big|_{x=4} = 78/5 = m_{L_T}$$

Ecuación de L_T: $L_T: y - 35 = \frac{78}{5}(x-4)$

Ecuación de L_N: $L_N: y - 35 = -\frac{5}{78}(x-4)$

f(7)

• LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

→ Dada la función $y = f(x)$, $x = a \in Dom(f)$.

$$f'(a) = \frac{d}{dx}(f)\Big|_{x=a}$$

→ Representa la razón de cambio instantánea

↳ Si $f'(a) > 0$, SIGNIFICA UN AUMENTO A RAZÓN DE .... (según el contexto del problema, unidades de la función y x e y)

↳ Si $f'(a) < 0$, SIGNIFICA UNA DISMINUCIÓN A RAZÓN DE ....

↳ Razón de cambio (AUMENTO o DISMINUYO), tasa de cambio, velocidad o rapidez son palabras relacionadas con la derivada, ritmo de cambio

Ej:
- La función de posición de una camioneta que se desplaza en línea recta, a las t horas es $S(t) = 50t - \frac{9}{t+1}$ km.

Calcule $S'(2)$ e interprete el resultado obtenido

Sol:

$S(t)$: posición en km
t: Tiempo en horas

↳ $S'(t) = (50t)' - \left(\frac{9}{t+1}\right)'$

↳ $S'(t) = 50 - \frac{(9)'(t+1) - (9)(t+1)'}{(t+1)^2}$

↳ $S'(t) = 50 + \frac{9}{(t+1)^2}$ $\quad \frac{50+9}{(2+1)^2}$ $\quad 50 + 1 = 51$

↳ $S'(2) = 51 \frac{km}{horas}$ → INTERPRETAR

$S'(2) = \frac{d}{d(x)}\left(50x - \frac{9}{x+1}\right)\Big|_{x=2} = 51$

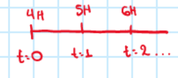
El desplazamiento de la camioneta a las 2 horas aumenta a razón de 51 km por hora aproximadamente

Ej:
- La temperatura, en grados centígrados, de un frigorífico está dada por $T(t) = \sqrt{t+3}$, donde t representa el tiempo en horas, desde las 04:00 a.m.

a: Halle la temperatura a las 05:00 horas
b: ¿Con qué rapidez está variando la temperatura a las 05:00 horas?

Sol:

$T(t)$: Temp. del frigorífico en °C
t: Tiempo en horas



a) $T(1) = 2$
A las 5:00 a.m. la temperatura del frigorífico es 2°C

b) $T'(1) = \frac{d}{d(x)}(\sqrt{x+3})\Big|_{x=1}$

$T'(1) = 0{,}25 \frac{°C}{Horas}$

A las 5 horas, la temperatura del frigorífico aumenta con una rapidez de $0{,}25 \frac{°C}{Horas}$